

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Л.А.ПЕТРОСЯН

Санкт-Петербургский государственный университет

Приведены основные определения теории дифференциальных игр преследования на примерах игр простого преследования на плоскости. Предложена структура оптимальных стратегий в игре с “линией жизни”. Назван ряд нерешенных проблем.

The main definitions of the differential pursuit game theory are given. They are illustrated through examples of simple pursuit games. The structure of the optimal strategies in “Lifeline Games” of simple pursuit and a number of unsolved problems are noted. The paper is understandable for a large circle of specialists not necessarily familiar with game theory.

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение теории дифференциальных игр было связано с приложениями в военном деле, когда оказалось необходимым математически описать и исследовать взаимодействие во времени конфликтующих сторон. Первой монографией в этой области прикладной математики является книга Р. Айзекса “Дифференциальные игры”, изданная в США в 1955 году (см. [1]). Однако основное содержание монографии было опубликовано в период с 1951 по 1954 год в закрытых публикациях корпорации “РАНД”. В нашей стране первые работы в этой области связаны с именами Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, Л.А. Петросяна (см. [2], [3], [4], [5]). В последние годы значительно усилился интерес к теории дифференциальных игр со стороны экономистов, социологов, специалистов в области международных отношений (см. [6]). Это связано с тем, что любая сложная социально-экономическая, политическая система развивается в результате действий многочисленных отдельных индивидуумов, имеющих собственные цели, а также случайных факторов. Происходит типичный конфликтноуправляемый процесс, математической моделью которого является дифференциальная игра N лиц. Основными проблемами в дифференциальных играх N лиц являются выработка принципа оптимальности (определение того, что является оптимальным поведением), доказательство его существования и поиск аналитических методов или численных алгоритмов нахождения оптимального решения. На сегодняшнем этапе развития теория дифференциальных игр использует сложный математический аппарат теории дифференциальных уравнений, теории оптимального управления, теории вероятностей, теории игр и функционального анализа. Поэтому может показаться невероятной сама постановка вопроса о преподавании основ теории дифференциальных игр в средней школе. Однако это не так. Имеется целый класс задач этой теории, а именно: задачи “простого преследования” на плоскости, которые могут быть математически точно сформулированы, не выходя за рамки программы 9–10 кл. и содержащие в себе основные определения и понятия современной теории дифференциальных игр. Здесь могут быть даже поставлены задачи для самостоятельной работы школьников, которые при соответствующем усердии могут привести к новым научным результатам.

ПРОСТОЕ ДВИЖЕНИЕ

Пусть точка P начинает движение на плоскости из начального состояния (положения) x_0 . Если отмечать ее текущие положения, то мы получим на плоскости некоторую непрерывную кривую, которая называется *траекторией движения*. Будем производить отсчет пройденного пути вдоль траектории от начальной точки x_0 . Во всяком движении длина пути s , пройденного точкой P , зависит от времени. Это

обстоятельство позволяет записать s как функцию времени: $s = s(t)$. Если известен способ перемещения точки P по этой траектории, то можно установить формулу, определяющую *положения точки на траектории* в любой момент времени, т.е. *закон движения точки*.

Траектория движения точки P на плоскости может представлять собой как прямую, так и кривую линию. Соответственно этому движение разделяются на *прямолинейные и криволинейные*. Простым движением называется такое движение, при котором расстояние, пройденное точкой P из начального состояния x ,

$$s(t) = \rho t,$$

здесь t — время, в течение которого происходило движение, $s(t)$ — путь, пройденный точкой P из начального состояния x_0 за время t , а величина ρ , представляющая собой путь, проходимый точкой P в единицу времени, называется *линейной скоростью точки*. При простом движении величина ρ является постоянной и не зависит от времени.

Таким образом, простое движение точки P из начального местоположения x_0 на плоскости есть движение по любой криволинейной траектории, исходящей из этой точки, с постоянной линейной скоростью ρ .

Простое движение точки P может рассматриваться в выпуклом множестве S на плоскости, т.е. в процессе движения точка P не покидает множество S . Напомним, что множество называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий две любые его точки, целиком содержится в этом множестве.

ПРОСТОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ЛОМАНЫМ

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать лишь подкласс простых движений, а именно всевозможные *движения по ломаным с конечным числом вершин*. Это означает, что мы будем предполагать в дальнейшем, что точка P , двигаясь с постоянной линейной скоростью ρ из начального положения x_0 , может изменять направление своего движения лишь конечное число раз. Отметим, что любое простое движение может с достаточной степенью точности быть аппроксимировано (приближено) простым движением по ломаным с конечным числом вершин.

Изучим *закон движения* точки P по ломаным с конечным числом вершин. Предположим, что на плоскости введена ортогональная система координат xOy и в момент времени $t = 0$ точка P находится в положении $x_0 = (x_{01}, x_{02})$. Пусть точка P в момент времени $t = 0$ начинает движение в некотором фиксированном направлении с постоянной линейной скоростью ρ . Это равносильно тому, что точка P , начиная с момента времени $t = 0$, движется с некоторой постоянной вектор-скоростью $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02})$, $\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 = \rho^2$.

Точка P , двигаясь с вектор-скоростью ω_0 в проме-

жутке времени $[0, t]$, пройдет путь, длина которого равна

$$s = \rho t = (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^{1/2} t = |\omega_0| t = |t \omega_0|,$$

где ω_0 — длина вектора ω_0 . Если символом $P(t) = (P_1(t), P_2(t))$ обозначим положение точки P в момент $t \geq 0$, $P(0) = x_0$, то будем иметь

$$P(t) = x_0 + t\omega_0$$

или в координатах

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = (x_{01} + t\omega_{01}, x_{02} + t\omega_{02}). \quad (1)$$

Таким образом, при движении точки P с вектор-скоростью ω_0 закон ее движения описывается уравнением (1).

Пусть в момент времени $t = t_1$ точка P изменяет направление своего движения и начинает перемещаться с постоянной вектор-скоростью $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{12})$, $\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 = \rho^2$. Точка P , продолжая движение с вектор-скоростью ω_1 из начального положения $P(t_1)$, в промежуток времени $[t_1, t]$ $t \geq t_1$, пройдет путь, длина которого равна $s = (t - t_1)\rho = |(t - t_1)\omega_1|$. Тогда при $t \geq t_1$ имеем

$$P(t) = P(t_1) + (t - t_1)\omega_1$$

или в координатах

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = (P_1(t_1) + (t - t_1)\omega_{11}, P_2(t_1) + (t - t_1)\omega_{12}). \quad (2)$$

Если в формуле (2) учесть, что $P(t_1) = (x_{01} + t_1\omega_{01}, x_{02} + t_1\omega_{02})$ (см. (1)), то для точки $P(t)$ при $t \geq t_1$ получаем

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = (x_{01} + t\omega_{01} + (t - t_1)\omega_{11}, x_{02} + t\omega_{02} + (t - t_1)\omega_{12}). \quad (3)$$

Таким образом, закон движения точки P на промежутке времени $[0, t_1]$ (t_1 — момент изменения направления движения точки P) описывается уравнением (1), а при $t \geq t_1$, когда P двигается с вектор-скоростью ω_1 , — уравнением (3). Последующие изменения направления движения точки P приводят нас к аналогичным формулам. Однако по предположению точка P может изменять направление своего движения лишь конечное число раз, поэтому, начиная с некоторого момента времени $t = t_k$, где k — некоторое натуральное число, точка P при всех $t \geq t_k$ будет перемещаться с некоторой постоянной вектор-скоростью

$$\omega_k = (\omega_{k1}, \omega_{k2}), \quad \omega_{k1}^2 + \omega_{k2}^2 = \rho^2.$$

Аналогично формулам (1), (3) можем получить

$$P(t) = P(t_k) + (t - t_k)\omega_k, \quad t \geq t_k$$

или в координатах

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = (P_1(t_k) + (t - t_k)\omega_{k1}, P_2(t_k) + (t - t_k)\omega_{k2}) = (x_{01} + t_1\omega_{01} + (t_2 - t_1)\omega_{11} + \dots + (t_k - t_{k-1})\omega_{k-1,1} + (t - t_k)\omega_{k1}, x_{02} + t_1\omega_{02} + (t_2 - t_1)\omega_{12} + \dots + (t_k - t_{k-1})\omega_{k-1,2} + (t - t_k)\omega_{k2}), \quad (4)$$

где $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02})$, $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{12})$, ..., $\omega_{k-1} = (\omega_{k-11}, \omega_{k-12})$ — постоянные вектор-скорости, выбранные точкой P в момент времени $0, t_1, t_2, \dots, t_k$ соответственно. Мы определили закон движения точки P вдоль ломаной с началом в точке $P(0)$ и с вершинами в точках $P(t_1), P(t_2), \dots, P(t_k)$. Таким образом, закон движения точки P по этой ломаной на отрезке времени $[0, t_1]$ описывается уравнением (1), где $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02})$, $\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 = \rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t = 0$; на отрезке времени $[t_1, t_2]$ — уравнением (3), где $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{12})$, $\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 = \rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t = t_1$, и т. д.; начиная с некоторого номера $t = t_k$ — уравнением (4), где $\omega_k = (\omega_{k1}, \omega_{k2})$, $\omega_{k1}^2 + \omega_{k2}^2 = \rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t = t_k$.

Отметим, что движение точки P по ломаным с конечным числом вершин можно также рассматривать на любом конечном отрезке времени $[0, \Theta]$.

ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПРОСТЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Пусть на плоскости задано выпуклое множество S . Точки P_1, P_2, \dots, P_m и E перемещаются в S , обладая простым движением с постоянными линейными скоростями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ и σ соответственно (здесь и всюду в дальнейшем рассматриваются только простые движения по ломаным с конечным числом вершин). Используя терминологию теории игр, совокупность точек P_1, P_2, \dots, P_m назовем *преследующим игроком* или *нарядом преследователей*, а E — *убегающим игроком*. Движение наряда P и игрока E начинается в момент времени $t = 0$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0), E(0)$. Положения игроков P_1, P_2, \dots, P_m, E в момент $t \geq 0$ обозначим соответственно $P_1(t), P_2(t), \dots, P_m(t)$ и $E(t)$.

Мы будем говорить, что наряд P осуществил встречу с E , если хотя бы один из преследователей P_i наряда P осуществил встречу с E , т.е. когда впервые положение E совпадает с положением хотя бы одного преследователя P_i из наряда P . Преследование нарядом P убегающего E начинается в момент времени $t = 0$ и завершается, когда наряд P осуществляет встречу с E . Потребуем, чтобы в процессе движения все преследователи из наряда P и убегающий E не покидали множества S . Целью наряда P является встреча с убегающим E за минимальное время, а цель убегающего E — оттянуть момент встречи или избежать ее, если это возможно.

В каждый момент времени $t \geq 0$ игроку E известно свое положение и положение всех преследователей в этот же момент времени. Каждый преследователь P_i из наряда P в момент времени $t \geq 0$ знает положения всех членов наряда, включая себя, положение игрока E и направление его движения в этот же момент времени t , однако ему неизвестны

будущие маневры E , т.е. P_i не знает, когда и как будет изменять игрок E направление своего движения в будущем.

Такую задачу преследования будем называть *игрой преследования с простым движением* и обозначать $\Gamma(m, 1; S)$, подчеркивая при этом зависимость от числа преследователей и вида множества S . В случае, когда S совпадает с плоскостью, такую игру обозначим $\Gamma(m, 1)$. При необходимости также будем использовать запись $\Gamma(P_1, P_2, \dots, P_m; E; S)$ или $\Gamma(P_1, P_2, \dots, P_m; E)$.

Конечное число Θ назовем *оптимальным временем преследования в игре* $\Gamma(m, 1; S)$ относительно начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$, если выполнены следующие условия:

а) для любых движений игрока E существует способ поведения наряда P , гарантирующий ему встречу с E не позже, чем за время Θ ;

б) существует такой способ поведения игрока E , что наряд P не может осуществить встречу с E до момента Θ .

Если для конечного числа Θ выполнено только условие а), то число Θ назовем *гарантированным временем преследования* относительно начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$, а если для конечного числа Θ выполнено только условие б), то число Θ назовем *гарантированным временем избежания* встречи относительно начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$.

Пусть Θ — оптимальное время преследования относительно начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$. Тогда любой способ поведения убегающего E , при котором наряд P не может осуществить с ним встречу до момента Θ (условие б)), назовем *оптимальной стратегией игрока E*. Способ поведения наряда P , при котором гарантируется встреча с E за время не позже, чем за время Θ (условие а)), назовем *оптимальной стратегией наряда P*.

Под решением игры $\Gamma(m, 1; S)$ мы будем понимать нахождение оптимальной стратегии наряда P , оптимальной стратегии игрока E и оптимального времени преследования.

Мы будем говорить, что в игре $\Gamma(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$ *возможно убежание*, если существует такой способ поведения убегающего E , что наряд P не может осуществить с ним встречу на любом конечном отрезке времени $[0, \Theta]$. Это означает, что если перед началом игры E поставил перед собой задачу избежать встречи с нарядом P в течение любого конечного, но фиксированного заранее времени Θ , то у него существует способ поведения, гарантирующий выполнение этой задачи при любых действиях наряда P .

ИГРА С "ЛИНИЕЙ ЖИЗНИ"

Пусть на плоскости задано выпуклое множество S ,

не совпадающее с плоскостью. Границу S обозначим буквой L и назовем *линией жизни*. Точки P_1, P_2, \dots, P_m и E , т.е. наряд преследователей P и убегающий E , перемещаются в S , обладая простым движением с постоянными линейными скоростями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ и σ соответственно. Так же, как и в игре $\Gamma(m, 1; S)$, движение наряда P и убегающего E начинается в момент $t = 0$ из положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$; предполагается, что игроки P и E в каждый момент времени $t \geq 0$ обладают той же информацией, что и в игре $\Gamma(m, 1; S)$. Цель наряда P — не допустить достижения границы — линии жизни L — игроком E до встречи с нарядом P . Цель убегающего E — достижение линии жизни L , при этом избегая встречи с P до момента достижения L . Такую задачу преследования с простым движением назовем *игрой с линией жизни* и будем обозначать $\Gamma(m, 1; S)$. Если из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$ существует способ поведения наряда P , гарантирующий достижение его цели при любых движениях E , то способ поведения назовем *оптимальной стратегией наряда P* и будем говорить, что в игре $\Gamma(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$ *выживание невозможно*. Это означает, что если в игре $\Gamma(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$ выживание невозможно, то оптимальная стратегия наряда P гарантирует встречу с убегающим E до достижения им линии жизни L .

Если для начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$ существует способ поведения убегающего E , гарантирующий достижение его цели, то этот способ назовем *оптимальной стратегией E* и будем говорить, что в игре $\Gamma(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$ *возможно выживание*. Это означает, что если в игре $\Gamma(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)$ и $E(0)$ выживание возможно, то оптимальная стратегия E гарантирует ему достижение линии жизни L до встречи с P .

Таким образом, на элементарном уровне нам удалось математически точно сформулировать основные понятия дифференциальных игр преследования: “оптимальное время преследования”, “гарантированное время преследования”, “гарантированное время избегания встречи”, “оптимальная стратегия игрока” и “решение игры”. Оказывается, и это можно доказать элементарными методами, что в ряде случаев оптимальной стратегией для преследователя является стратегия параллельного сближения, т.е. такой способ поведения, когда преследователь P сближается с E таким образом, что отрезок, соединяющий их текущие местоположения, остается параллельным самому себе. Эта стратегия называется Π -стратегией. Для описания движения преследователя при использовании Π -стратегии достаточно математических знаний в объеме 9—10 класса средней школы. Интересной задачей на геометрические места

может служить задача определения множества точек встречи при условии, когда преследователь использует Π -стратегию, а движение убегающего произвольно. Эта задача решается также на элементарном уровне и это множество оказывается кругом Аполлония. Это обстоятельство дает решение игры с линией жизни с одним преследователем и одним убегающим: если круг Аполлония относительно начальных состояний $P(0), E(0)$ целиком содержится в множестве S , не пересекаясь с его границей, то преследователь, используя Π -стратегию, гарантирует встречу с убегающим игроком внутри S при всех движениях последнего; если же круг Аполлония пересекается с границей множества S , то у убегающего существует стратегия, гарантирующая ему достижение границы множества S (линии жизни) до его поимки преследователем. Π -стратегия является оптимальной и в других задачах преследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В указанных терминах возможна также точная формулировка неантагонистических игр преследования и связанных с этим новых, достаточно сложных принципов оптимальности: равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето. Соответствующие примеры приведены в популярных книгах [7], [8]. Особенно привлекательной для творчески мыслящих школьников является возможность получения новых математических результатов элементарными методами. В частности, до сих пор является открытой проблема нахождения оптимальных стратегий в игре с одним преследователем и двумя убегающими, одним преследователем и одним убегающим при условии, что один из них или оба не могут выходить за пределы некоторого заданного множества и необъятный класс задач преследования, когда игроки могут не знать точно местоположение друг друга на определенных этапах игры.

Игры преследования на плоскости могут лечь в основу создания широкого класса интеллектуальных компьютерных игр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 1. ДАН, 1967, т. 174, № 6, с. 1278—1280.
3. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2. ДАН, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 224 с.
6. Basar T., Olsder G. Dynamic Noncooperative Game Theory. N. Y., Ac. Press, 1982.
7. Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б. Преследование на плоскости. М.: Наука, 1991, серия “Популярные лекции по математике”, выпуск 61.
8. Петросян Л. А., Томский Г. В. Через игры — к творчеству. М.: Наука, 1991.